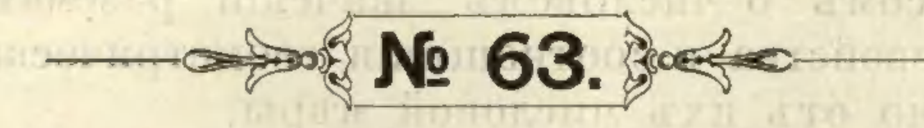
ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



VI Сем. 5 Февраля 1889 г. № 3.

Именованныя величины въ школьномъ преподаванiи и значенiе ихъ символовъ.

*(Продолженiе *).*

III.

40. Въ первой части настоящей статьи мы изложили вопросъ по существу и показали въ какой послѣдовательности слѣдуетъ раскрывать его ученикамъ. Во второй части мы развили нѣкоторыя соображенiя, которыя могутъ служить подтвержденiемъ правильнаго взгляда.

Обратимся теперь къ *историческому развитiю* и покажемъ, что вопросъ о дѣйствiяхъ надъ именованными величинами сначала былъ рѣшенъ правильно.

Въ сочиненiяхъ по исторiи математики, на сколько знаемъ, вопросъ не разбирается въ явной формѣ, хотя есть достаточные матерiалы для его рѣшенiя, и намъ придется только указать на значенiе нѣкоторыхъ историческихъ фактовъ. Но, чтобы быть вполнѣ ясными, намъ придется изложить факты довольно подробно. Важность вопроса достаточно извиняетъ нѣкоторую подробность изложенiя, а простыя ссылки едва-ли цѣлесообразны, такъ какъ сочиненiя по исторiи математики далеко не у всѣхъ въ рукахъ.

Главнымъ образомъ воспользуемся: „Maximilien Marie, Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques. Vol. I—XII". Авторъ съ замѣчательною ясностiю излагаетъ ходъ развитiя математическихъ идей, и вслѣдствiе этого почти отвѣчаетъ на интересующiй насъ вопросъ, хотя не ставитъ его непосредственно.

41. Намъ придется начать съ развитiя математики у древнихъ грековъ. Maximilien Marie дѣлитъ время до Дiофанта на три перiода, изъ которыхъ первый обнимаетъ время отъ Θалеса (род. около —640 г.) до Аристарха Самосскаго (род.—310 г.). Къ этой эпохѣ принадлежитъ Эвклидъ (род.—315, ум.—255 г.).

Въ упомянутый первый перiодъ развивается геометрiя и первыя попытки числовыхъ вычисленiй, но характерною чертою служитъ отсутствiе взаимной связи между ними.

---

*) См. „Вѣстникъ" №№ 55 и 56.

Для чисто практическихъ цѣлей, напримѣръ купли полей, греки конечно опредѣляютъ, хотя-бы приближенно, ихъ величину; было бы нелѣпо задаться вопросомъ (М. М. II, 15) кто первый уразумѣлъ, что прямоугольникъ, стороны котораго 2 и 3 стадіи, содержитъ 6 квадратовъ, длина стороны которыхъ равна одной стадіи.

Но въ теоретическихъ изслѣдованіяхъ греческіе геометры никогда не задаются вопросомъ о числовомъ значеніи разсматриваемыхъ величинъ, и изучаютъ свойства и соотношенія геометрическихъ величинъ совершенно независимо отъ ихъ числовой мѣры.

Это обусловливается главнымъ образомъ двумя обстоятельствами (М. М. I, 3).

Во первыхъ—введеніе единицы мѣры привело бы къ приближенному выраженію величинъ, несоизмѣримыхъ съ нею; а въ зависимости отъ этого греческіе геометры считали бы правильность и точность разсмотрѣній принципіально нарушенными.

Во вторыхъ—древніе не понимали какой интересъ могло бы представлять введеніе единицы, т. е. величины посторонней, непосредственно не входящей въ условія и данныя вопроса.

Къ этому, конечно, присоединяется еще крайнее неудобство письменнаго счисленія древнихъ; при ихъ способѣ изображенія чиселъ, дѣйствія надъ большими числами были слишкомъ затруднительны, и этимъ особенно усугубляется первое изъ упомянутыхъ обстоятельствъ.

Вслѣдствіе полнаго отсутствія элемента числовой мѣры и единицы измѣренія, выраженіе теоремъ получаетъ совершенно особый отпечатокъ.

Эвклидъ, который безспорно сумѣлъ бы опредѣлить достаточно точно стоимость какого нибудь земельнаго участка, не говоритъ, что мѣра прямоугольника есть произведеніе мѣръ основанія и высоты; онъ указываетъ только соотношеніе различныхъ прямоугольниковъ и выражается слѣдующимъ образомъ: прямоугольники находятся въ составномъ отношеніи основаній и высотъ,—чѣмъ и ограничивается.

Архимедъ не говоритъ, что площадь круга измѣряется половиною произведенія длины окружности на радіусъ; онъ только доказываетъ, что кругъ равняется треугольнику, основаніе котораго равно окружности, а высота радіусу, — ограничиваясь сведеніемъ задачи на болѣе простую.

42. Намъ кажется, что въ этомъ смыслѣ особаго вниманія заслуживаютъ нѣкоторыя предложенія X-ой книги Эвклида, въ которой изложена геометрія ирраціональныхъ величинъ, а именно:

Предл. 5. Соизмѣримыя величины A и B относятся между собою какъ нѣкоторыя числа.

Предл. 6. Если величины A и B относятся между собою какъ числа, т. е. если $A : B = m : n$, то A и B соизмѣримы.

Предл. 7. Несоизмѣримыя величины A и B не могутъ относиться между собою, какъ числа.

Предл. 8. Если величины A и B не относятся между собою, какъ числа, то онѣ несоизмѣримы.

Приводимъ текстъ этихъ предложеній по переводу проф. Ващенко-Захарченко (Начала Эвклида съ пояснительнымъ введеніемъ и толкова-

ніями, стр. 345), но должны сказать, что здѣсь и самый способъ выраженія теоремъ, повидимому, подвергся нѣкоторому переводу, потому что что Эвклидъ не знаетъ ни символическаго обозначенія чиселъ, ни символическаго изображенія пропорцій, которыя всегда выражаетъ словесно.

На нашъ взглядъ приведенныя теоремы весьма любопытны; съ современной точки зрѣнія онѣ кажутся нѣсколько странными.

Одна изъ основныхъ истинъ, съ которою теперь знакомятъ всякого школьника, заключается въ томъ, что числовой мѣрой не могутъ выражаться только величины въ родѣ вкуса и запаха, любви и гнѣва, т. е. такія, для которыхъ нельзя выбрать опредѣленной единицы сравненія. Основное же свойство цѣлаго ряда другихъ величинъ (геометрическая величина, цѣнности, время и т. д.) заключается именно въ возможности ихъ числового опредѣленія путемъ сравненія съ единицею.

Кромѣ того мы насквозь пропитаны сознаніемъ достаточности извѣстныхъ приближеній, и этотъ взглядъ кладетъ свой отпечатокъ на первыя слова въ школѣ. Кому, спрашивается, соображенія о несоизмѣримыхъ линіяхъ и объ ирраціональныхъ отношеніяхъ не казались на школьной скамьѣ излишнимъ педантизмомъ, который получалъ свой смыслъ только по ознакомленіи съ ирраціональными числами, къ которымъ приводитъ извлеченіе корней.

Но упомянутая основная истина нашего преподаванія была совершенно чужда древнимъ. Эвклидъ не интересуется опредѣленной мѣровою единицею сравненія. Для древнихъ единица сравненія имѣла только чисто техническое, чисто эмпирическое значеніе. Древняя наука, повидимому, считала единицы сравненія гораздо менѣе научными, чѣмъ современная эмпирическія формулы.

Поэтому упомянутыя предложенія и получили у Эвклида свою своеобразность. Онъ не говоритъ, что несоизмѣримыя величины не могутъ относиться безусловно точно, какъ нѣкоторыя цѣлыя числа, а совершенно отказывается отъ числового отношенія, когда рѣчь идетъ о строгой научности.

Обратимъ однако должное вниманіе и на то, что Эвклидъ, изгнавъ числовыя значенія изъ своихъ разсмотрѣній, посвящаетъ всю обширную X книгу (117 теоремъ) изученію зависимостей между несоизмѣримыми величинами.

Въ этомъ тоже сказывается принципіальное разногласіе съ современными взглядами: теперь многіе желаютъ знать только числовыя зависимости отвлеченныхъ чиселъ, изгоняя изъ дѣйствій надъ величинами элементъ ихъ вещественности,—Эвклидъ же, какъ разъ наоборотъ, отвергаетъ числа.

А между тѣмъ многія изъ предложеній X-ой книги чисто алгебраическія теоремы, и поэтому не излагаются въ курсахъ геометріи. Въ упомянутомъ изданіи „Началъ" на стр. 468 приводится переводъ нѣкоторыхъ такихъ предложеній на современный алгебраическій языкъ; возьмемъ нѣсколько примѣровъ.

Въ предложеніяхъ 43—48, 80—85 Эвклидъ доказываетъ, что разныя ирраціональныя величины, полученныя чрезъ сложеніе или вычитанѣе (въ переводѣ: ирраціональныя двучленныя выраженія) могутъ разложиться на составныя части только въ одной точкѣ.

Въ переводѣ это значитъ, что равенства

$$a \pm \sqrt{b} = x \pm \sqrt{y}$$

или

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

возможны только если

$$a = x$$

$$b = y.$$

Далѣе въ предл. 55 — 60, 92 — 97 Эвклидъ геометрически извлекаетъ квадратные корни изъ биноміальныхъ и изъ вычетовъ. Приведемъ одинъ примѣръ.

Предл. 55 гласитъ: площадь прямоугольника, заключеннаго между раціональною линіею и первою биноміальною, квадратится биноміальною прямою.

Смыслъ этого предложенія тотъ, что изъ произведенія раціональной и первой биноміальной можно извлечь корень квадратный и онъ имѣетъ видъ ирраціональнаго двучлена. Эта теорема слѣдовательно выражаетъ извѣстную формулу.

$$\sqrt{p[a+\sqrt{a^2-b^2}]} = \sqrt{p}\sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{p}\sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

Оговоримъ для ясности значеніе терминовъ Эвклида.

Раціональною называется произвольно взятся прямая (Кн. X. опр. 5); въ данномъ случаѣ p.

Биноміальною (предл. 37) называется линія, происшедшая отъ сложенія двухъ раціональныхъ, только въ степени соизмѣримыхъ линій; въ данномъ случаѣ

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

Первою биноміальною называется такая биноміальная, коей большій членъ квадратитъ надъ меньшимъ (въ переводѣ: разность квадратовъ) на квадратъ, коего сторона соизмѣрима съ большимъ членомъ (опред. 1, предшествующее предл. 49); въ данномъ случаѣ

$$a+\sqrt{a^2-b^2}.$$

Нѣтъ рѣчи, что способъ выраженія X-ой книги весьма тяжеловѣсный. Эвклидъ различаетъ напримѣръ 13 различныхъ ирраціональностей, („Начала“ стр. 453), а именно:

1. Среднія прямыя (предл. 22).
2. Биноміальныя (предл. 37).
3. Первая биноміальная (предл. 38).
4. Вторая биноміальная (предл. 39).

5. Большая ирраціональная (пред. 40).
6. Квадратящая раціональный и средній прямоугольники (предл. 41).
7. Квадратящая двѣ среднія (предл. 42).
8. Вычеты (предл. 74).
9. Первый средній вычетъ (предл. 75).
10. Второй средній вычетъ (предл. 76).
11. Малая ирраціональная (предл. 77).
12. Которая съ раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь (предл. 78).
13) Которая съ среднимъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь (предл. 79).

Сюда присоединяются еще бимедіальныя, среднія степенящія и т. д., и все это чрезвычайно затрудняетъ чтеніе X-ой книги. Но въ ней съ особою ясностію выступаетъ методъ древнихъ, а именно: соотношенія между дѣйствительными величинами, по существу своему количественныя, составлѣютъ предметъ изслѣдованія, но рѣшенія даются во всей непосредственности осязательными построеніями, а элементъ числовой мѣры вполнѣ отсутствуетъ.

43. Maximilien Marie тщательно изслѣдуетъ вопросъ о состояніи тѣхъ свѣдѣній древнихъ геометровъ, которыя могутъ быть названы алгебраическими. Нѣсколько далѣе вернемся къ нему; но, чтобы онъ яснѣе выступилъ, разсмотримъ сначала въ какомъ положеніи были научныя числовыя опредѣленія.

Первыя попытки ввести числа въ теоретическія изслѣдованія, опредѣляя величину нѣкоторыхъ отношеній, были сдѣланы Аристархомъ Самосскимъ и Архимедомъ. M. Marie признаетъ этотъ фактъ такимъ знаменательнымъ, что выдвигаетъ его на первый планъ въ общей оцѣнкѣ второго періода, считая имъ время отъ Аристарха Самосскаго (род. —310 г.) до Гиппарха (род. — 150). Это вѣкъ Архимеда и Апполонія. Приведемъ упомянутую характеристику (M. M. I, 59—61).

„Въ теченіе второго періода въ теоретическихъ изслѣдованіяхъ начинаютъ появляться числовыя вычисленія для опредѣленія величины нѣкоторыхъ отношеній, представляющихъ спеціальный интересъ въ астрономическихъ изысканіяхъ; замѣтимъ, что не геометрія заставляетъ Архимеда искать приближеннаго отношенія окружности къ діаметру; онъ желаетъ сосчитать число песчинокъ, могущихъ содержаться въ шарѣ, радіусъ котораго—разстояніе земли отъ солнца; и для подобной, не слишкомъ важной цѣли, онъ конечно ограничивается первымъ приближеніемъ.

„Греки давно уже умѣли отыскивать механическими операціями общую наибольшую мѣру двухъ однородныхъ величинъ, данныхъ непосредственно, и выражать приблизительно ихъ отношеніе, если данныя величины поддавались этому. Но до Аристарха Самосскаго и до Архимеда никто не пытался находить теоретическими соображеніями отношенія двухъ величинъ, связанныхъ мало мальски сложною зависимостію; даже

величина отношенія діагонали квадрата къ его сторонѣ не возбуждала любопытства.

„До Аристарха и до Архимеда никому въ голову не приходило искать теоретически сколько разъ одинъ изъ членовъ отношенія содержится въ другомъ. Не видѣли потребности въ этомъ.

„Греки часто преобразовываютъ отношенія, такъ напримѣръ они знаютъ отлично, что два квадрата находятся въ томъ же отношеніи, какъ отрѣзки гипотенузы прямоугольнаго треугольника, катеты котораго образованы сторонами данныхъ двухъ квадратовъ. Они умѣютъ различными способами сводить отношеніе прямоугольниковъ на сложное отношеніе линій; но члены преобразованнаго отношенія всегда такіе же конкретные, вещественные, какъ и члены даннаго.

„Даже форма выраженія различныхъ отношеній,—составного, удвоеннаго, утроеннаго, полуторнаго, — показываютъ, что числа совершенно чужды этимъ разсмотрѣніямъ. Прослѣдимъ это.

„Данное отношеніе можетъ быть выражено въ различныхъ формахъ; если выраженіе *какъ* A *къ* B неудобно, его замѣняютъ такимъ: какъ C относится къ четвертой пропорціональной величинѣ A, B и C.

„Такъ напримѣръ подъ отношеніемъ, составнымъ изъ отношеній A къ B и C къ D, понимаютъ отношеніе A къ четвертой пропорціональной величинѣ B, C и D. Въ непосредственной же формѣ подъ составнымъ отношеніемъ понимаютъ отношеніе прямоугольниковъ, построенныхъ на A и B, и на C и D.

„Подъ удвоеннымъ отношеніемъ понимаютъ отношеніе, составное изъ двухъ равныхъ отношеній, напримѣръ, квадраты находятся въ удвоенномъ отношеніи сторонъ; кубы въ утроенномъ отношеніи реберъ.

„Смыслъ этого такой. Чтобы получить отношеніе двухъ квадратовъ, построенныхъ на A и на B, надо взять произвольную длину C и построить четвертую пропорціональную X величинъ B, C и A; затѣмъ четвертую пропорціональную Y величинъ B, X и A; тогда отношеніе Y и C равно удвоенному отношенію A и B.

„Или проще: удвоенное отношеніе двухъ линій A и B равно отношенію отрѣзковъ гипотенузы прямоугольнаго треугольника, катеты котораго суть A и B.

„Подъ *полуторнымъ* отношеніемъ двухъ линій A и B понимаютъ отношеніе, составное изъ даннаго и его половиннаго; другими словами это отношеніе составное изъ даннаго и изъ отношенія катетовъ треугольника, гипотенуза котораго составлена изъ отрѣзковъ A и B".

Въ подобной наглядно-осязательной формѣ, совершенно помимо числовыхъ измѣреній представляется у древнихъ вопросъ объ отношеніяхъ. M. Marie резюмируетъ такую точку зрѣнія слѣдующимъ образомъ: „Конечно понимали, что существуетъ отношеніе между длиною окружности и радіусомъ, потому что обѣ величины прямо пропорціональны другъ другу; но такъ какъ вѣроятно нѣтъ точнаго числа, могущаго выразить это отношеніе, то его и не искали, и даже считали нелѣпымъ задаться его вычисленіемъ. И дѣйствительно Архимедъ не ищетъ отношенія окружности къ діаметру, онъ опредѣляетъ только величину окружности, радіусъ которой данъ". (M. M. I, 61).

44. Упомянутая попытка Аристарха (M. M. I, 71) заключается въ

опредѣленіи отношенія разстоянія солнца и луны отъ земли. Онъ разсматриваетъ прямоугольный треугольникъ, въ вершинахъ котораго находятся солнце, земля и луна, когда освѣщена половина ея диска. М. Magie замѣчаетъ, что согласно духу времени вопросъ могъ считаться рѣшеннымъ, когда, по измѣреніи угла между линіями, проведенными отъ солнца къ лунѣ и къ землѣ, былъ-бы построенъ прямоугольный треугольникъ, подобный разсматриваемому дѣйствительному; такъ какъ требуемое отношеніе дается отношеніемъ его гипотенузы къ одному изъ катетовъ. Но Аристархъ дѣлаетъ принципіально новый шагъ; онъ задается вычисленіемъ числовой величины отношенія, разсматривая данныя вопроса, и находитъ, что оно заключается между 18 и 20. Ошибка обусловливается невѣрностію опредѣленія угла, полагаемаго равнымъ 3°; опредѣленіе его дѣйствительной величины (около 9′) было Аристарху не по средствамъ; но его соображенія довольно удовлетворительны, потому что рѣшая треугольникъ, принявъ уголъ равнымъ 3°, получается приблизительно 19.

Другая упомянутая попытка принадлежитъ Архимеду. Онъ, какъ мы сказали, вообще не опредѣляетъ мѣры поверхностей и объемовъ, и считаетъ ихъ измѣренными, когда опредѣлена болѣе простая равновеликая фигура. Его книга „О числѣ песчинокъ“, представляетъ крупный историческій интересъ. Она посвящена развитію способа выраженія весьма большихъ чиселъ. Архимедъ обращается противъ несправедливости мнѣнія, будто нѣтъ числа, большаго числа песчинокъ, наполняющихъ объемъ, равный земному шару, и доказываетъ, что напротивъ есть числа, которыя превышаютъ даже число песчинокъ, необходимыхъ для наполненія шара, равнаго по величинѣ всей вселенной. Особая замѣчательность книги состоитъ въ томъ, что Архимедъ пользуется числовымъ отношеніемъ окружности къ діаметру для вычисленія объема шаровъ.

Величина же этого отношенія опредѣляется въ книгѣ „Объ измѣреніи круга“ въ предл. 3, гласящемъ: окружность всякого круга равна тремъ діаметрамъ съ частію діаметра, которая меньше $\frac{1}{7}$ этого діаметра и больше $\frac{10}{71}$ того же діаметра.

Но единственный случай, гдѣ Архимедъ пользуется величиною отношенія, упомянутый.

45. Числовыя вычисленія получаютъ дальнѣйшее развитіе въ третій періодъ науки, которымъ М. Magie считаетъ время отъ Гиппарха (род.—150) до Діофанта (род.+325 г.).

Въ продолженіе этихъ четырехъ вѣковъ развивается тригонометрія, и выходя изъ свойствъ діагоналей четыреугольника, вписаннаго въ окружность, даются таблицы для хордъ; уже Гиппархъ повидимому умѣлъ рѣшать плоскіе и сферическіе треугольники, сводя ихъ на рѣшеніе прямоугольныхъ. Въ этотъ же періодъ Теонъ Александрійскій (320—395) даетъ истинное правило извлеченія квадратныхъ корней изъ чиселъ.

Но все еще (М. М. I, 193) нѣтъ рѣчи о замѣнѣ изслѣдованія соотношеній между величинами изслѣдованіемъ соотношеній ихъ мѣръ, хотя бы въ зависимости отъ единицы, вытекающей изъ условій вопроса, а

тѣмъ болѣе относительно произвольной единицы. Соотношеніе величинъ берется непосредственно изъ фигуры, въ которую онѣ входятъ, и получаетъ вещественное выраженіе.

46. Весьма любопытно однако, что у древнихъ геометровъ до Діофанта тѣмъ не менѣе былъ рядъ свѣдѣній, которыхъ нельзя назвать иначе, какъ алгебраическими, такъ какъ въ нихъ выражаются такія зависимости между дѣйствительными величинами, которыя по существу чисто количественныя и могутъ быть непосредственно переводимы на нашъ алгебраическій языкъ, хотя выражались въ геометрическомъ обликѣ.

Они могутъ быть раздѣлены на двѣ категоріи, и къ первой относятся тѣ, которыя могли быть найдены путемъ геометрическихъ соображеній.

Сюда, какъ уже упомянули, относится во первыхъ знаніе преобразованій отношеній и пропорцій, и истины X-ой книги Эвклида.

Точно также II-ая книга Эвклида содержитъ рядъ геометрическихъ предложеній, имѣющихъ интересъ только въ алгебраической формѣ, а именно (М. М. I).

Предл. III $(a+b)b=ab+b^2$

" IV $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

" V $(a+h)(a-h)+h^2=a^2$

" VI $(2a+h)h+a^2=(a+h)^2$

" VII $(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$

" VIII $4(a+b)a+b^2=(2a+b)^2$

" IX $(a+h)^2+(a-h)^2=2a^2+2h^2$

" X $(2a+h)^2+h^2=2a^2+2(a+h)^2$.

Трудно предположить, говоритъ М. Марiе (I, 48), чтобы Эвклидъ не понималъ, что его предложенія остаются вѣрными, если выразить входящіе отрѣзки стадіями,—но онъ однако не занимается этимъ переходомъ къ числовымъ задачамъ.

47. Сюда относится умѣніе древнихъ геометрически рѣшать нѣкоторыя задачи, приводящія къ квадратнымъ уравненіямъ.

Они рѣшаютъ задачу объ опредѣленіи средняго пропорціональнаго двухъ отрѣзковъ,—что равносильно рѣшенію уравненія

$$x^2=ab.$$

Рѣшаютъ задачу о построенія сторонъ прямоугольника по полупериметру и по площади,—что равносильно рѣшенію уравненія

$$x^2-px+q^2=0.$$

Рѣшаютъ задачу о построеніи сторонъ прямоугольника по ихъ разности и по площади—что равносильно уравненію

$$x^2 \pm px-q^2=0$$

Не затрогивается только уравненіе

$$x^2+px+q^2=0,$$

не имѣющее положительныхъ корней, такъ какъ его рѣшеніе не соотвѣтствуетъ геометрическимъ свѣдѣніямъ древнихъ.

М. Магіе вполнѣ присоединяется къ мнѣнію Шаля, что изъ нѣкоторыхъ предложеній книги „Данныхъ" Эвклида непосредственно вытекаетъ рѣшеніе квадратныхъ уравненій. Онъ говоритъ (I, 45):

„Если Эвклидъ, Архимедъ и Апполоній не пользуются выраженіями корней квадратнаго уравненія въ явной формѣ, то вѣдь они и не нуждаются въ этомъ, потому что всегда разсматриваютъ наглядно сами величины, а не ихъ числовыя значенія. Однако построенія задачъ о дѣленіи прямой въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, объ опредѣленіи прямоугольника, равномѣрнаго данному квадрату и стороны котораго имѣли-бы опредѣленную сумму или разность,—даютъ такое выразительное изображеніе корней квадратнаго уравненія, что было-бы невозможно не замѣтить ихъ, если бы только вопросъ объ этихъ корняхъ былъ поставленъ".

48. Но у древнихъ были еще свѣдѣнія другой категоріи, которыя заставляютъ предположить, что они пользовались нѣкоторыми алгебраическими пріемами. Какъ примѣръ этого М. Магіе указываетъ (I, 118 и слѣд.), что Архимедъ, при рѣшеніи вопроса о равновѣсіи плавающаго отрѣзка параболическаго коноида, говоритъ, что уголъ его оси съ поверхностію жидкости равенъ одному изъ угловъ прямоугольнаго треугольника, катеты котораго равны

$$\sqrt{p\left[\frac{2}{3}h\left(1-\sqrt{\frac{P'}{P}}\right)-p\right]}$$

$$\frac{2}{3}h\left(1-\sqrt{\frac{P'}{P}}\right)-p$$

гдѣ p полупериметръ, h высота отрѣзка, P' и P плотности коноида и жидкости. Формулы конечно не даются, но словесно выражается рядъ выраженныхъ въ нихъ дѣйствій.

Какой бы геніальный Архимедъ ни былъ, говоритъ М. Магіе, все таки невозможно предположить, чтобы онъ могъ прійти къ словесному выраженію такого сложнаго правила, не нашедши его предварительно нѣкоторыми алгебраическими выкладками. Напротивъ надо предположить, что Архимедъ умѣлъ ихъ производить, и даже хорошо.

49. Въ сочиненіяхъ древнихъ однако не сохранилось слѣда ихъ алгебраическихъ пріемовъ. Древніе, говоритъ М. М. очевидно не хотѣли излагать ихъ; потому ли, что считали ихъ доступными только генію и поэтому неудобопередаваемымы; потому ли, что ихъ пугала сложность длинныхъ словесныхъ объясненій, которыя были бы необходимы за отсутствіемъ удобныхъ обозначеній. Неудобство писанныхъ знаковъ конечно должно было являться коренной помѣхой усовершенствованія алгебраическихъ пріемовъ, которые такимъ образомъ остались вспомогательнымъ методомъ въ рукахъ немногихъ крупнѣйшихъ двигателей науки.

Эвклидъ, Апполоній и Архимедъ, въ рукахъ которыхъ древняя наука получила свое высшее развитіе, не могутъ считаться творцами алгебры, но они отлично подготовили почву для ея правильнаго развитія, и можно сказать, что алгебра была какъ будто наканунѣ своего рожденія,—стоило только облечь ее въ явную форму. M. Marie придаетъ высокое значеніе этому факту и справедливо замѣчаетъ, что если бы Архимедъ хоть сколько нибудь сдѣлалъ это, онъ спасъ-бы науку отъ застоя въ полторы тысячи лѣтъ.

Позволимъ себѣ высказать слѣдующее предположеніе. Намъ кажется, что если бы греки сумѣли облечь въ символы тѣ зависимости, которыя они изучали геометрически, и если бы наука о числовыхъ дѣйствіяхъ надъ величинами получила свое развитіе, то при томъ духѣ полной конкретности и вещественности, которымъ проникнуты ихъ разсмотрѣнія, они увидѣли бы въ количественныхъ зависимостяхъ не что иное какъ строгое соотвѣтствіе дѣйствительныхъ зависимостей, и вопросъ о томъ, производятся ли дѣйствія надъ величинами или только надъ ихъ числовыми значеніями, вовсе не былъ бы ими поставленъ. Справедливо говорятъ, что отъ Архимеда къ алгебрѣ одинъ шагъ, но, прибавимъ, отъ него же до современнаго взгляда на дѣйствія слишкомъ большая даль.

Обратимъ еще вниманіе на слѣдующее. Обыкновенно указываютъ, что эпоха возрожденія европейской науки отдѣлена отъ древне-греческаго періода мракомъ среднихъ вѣковъ и ищутъ въ политическихъ условіяхъ причины упадка древней науки. Этотъ факторъ безспорно былъ весьма вѣскимъ и роковымъ; но очевидно есть еще и другія условія, въ которыхъ кроется причина того, что алгебра, подготовленная древними, все таки не составляетъ ихъ достоянія. Архимедъ умеръ въ 212 г. до Р. Хр., а Діофантъ и Паппусъ жили въ IV вѣкѣ послѣ Р. Хр. Въ теченіе этихъ 500 лѣтъ Эвклидъ и Архимедъ еще не преданы забвенію; крупные коментаторы древней науки Гипатія (ум. 415) и Проклъ (412—485) живутъ еще позже. Но если принять во вниманіе какъ мало сдѣлано въ эти 5 вѣковъ, и сопоставить этотъ фактъ съ быстрымъ разцвѣтомъ, начиная съ того времени, когда математики умѣютъ пользоваться символами, то невольно приходишь къ заключенію, что основная, коренная причина, почему алгебра не развилась въ древности заключается въ отсутствіи удобныхъ символовъ.

50. Діофантомъ (325—409) начинается новый періодъ въ развитіи математики. Онъ имѣетъ большое историческое значеніе; его изучаютъ не только современники, но и арабы и италіанскіе, французскіе и нѣмецкіе геометры эпохи возрожденія; даже Віетъ ограничивается большею частію задачами Діофанта.

Но Діофантъ не примыкаетъ въ своихъ изслѣдованіяхъ къ алгебраическимъ принципамъ, скрытымъ у предшественниковъ; онъ направилъ науку на ариѳметическое развитіе, и въ этомъ смыслѣ его нельзя считать творцомъ алгебры.

Онъ первый рѣшаетъ уравненія вычисленіемъ, но не ставитъ вопросовъ во всей общности, а разсматриваетъ отдѣльные частные случаи, выбирая при томъ данныя такъ, чтобы результаты были соизмѣримые (M. M. II, 10).

Діофантъ понимаетъ исключеніе неизвѣстнаго изъ двухъ уравненій, но онъ никогда не дѣлаетъ его непосредственно,—это требовало-бы нѣкотораго вычисленія, чисто алгебраическаго по своему оттѣнку (М. М. II, 9). Онъ или опредѣляетъ для этой цѣли отношеніе исключаемой величины къ остающейся, или выбираетъ новое перемѣнное, и особенно силенъ въ послѣднемъ пріемѣ.

Любопытенъ его способъ рѣшенія квадратныхъ уравненій; онъ совершенно избѣгаетъ составленія уравненія. М. Marie приводитъ примѣръ (II, 33): ищутся два числа, коихъ сумма и произведеніе были бы данныя числа.

Рѣшеніе. Пусть сумма равна 20, произведеніе 96. Пусть 2N разность обоихъ чиселъ; тогда большее равно 10 плюсъ 1N, а меньшее 10 безъ 1N. Произведеніе будетъ 100] безъ 1Q (квадратъ) и это должно равняться 96. Слѣдовательно 1Q равно 4, а N равно 2, и искомыя числа равны 12 и 8.

Параллельно съ этимъ однако Діофантъ говоритъ: необходимо, чтобы квадратъ половины суммы обоихъ чиселъ былъ больше ихъ произведенія на квадратъ.

Слѣдовательно онъ знаетъ условіе возможности, ограничивая его условіемъ, чтобы корень былъ раціональный; и является вопросъ, почему онъ не даетъ формулы рѣшенія. Можно предположить (М. М. II, 35), что Діофантъ не желалъ лишать себя удовольствія разсматривать многообразныя какъ будто независимыя задачи. Но думаемъ, что гораздо проще усматривать и здѣсь борьбу мысли съ неумѣніемъ толковой ея передачи символическимъ выраженіемъ. Формальный составъ выраженій Діофанту недостаточно ясенъ. Такъ напримѣръ онъ рѣшаетъ рядъ задачъ, гдѣ въ числѣ данныхъ входитъ разность квадратовъ искомыхъ чиселъ и ихъ сумма или разность. Но онъ никогда не опредѣляетъ по нимъ дѣленіемъ неизвѣстной разности или суммы,—Віетъ первый умѣетъ это дѣлать.

Нельзя поэтому сказать, чтобы алгебра вышла изъ рукъ Діофанта даже въ элементарномъ видѣ, хотя рѣшеніе числовыхъ уравненій ему многимъ обязано (М. М. II, 43).

51. Новое направленіе, начатое Діофантомъ, получило дальнѣйшее развитіе уже не у грековъ. Начиная отъ Діофанта до эпохи возрожденія Европа почти не участвуетъ въ развитіи математики, которая въ это время находитъ пріютъ у Арабовъ. Въ это же время живутъ и индусскіе математики, и арабы могутъ считаться отчасти ихъ учениками, главнымъ же образомъ учениками грековъ.

М. Marie сравнительно мало говоритъ объ арабахъ и невысокаго мнѣнія объ ихъ заслугахъ: „Если сравнить, что сдѣлано арабами въ теченіе пяти или шести вѣковъ съ тѣмъ, что на западѣ сдѣлано въ послѣдніе 400 лѣтъ, то отношеніе выходитъ почти равнымъ нулю. Принимая, что нашъ долгъ арабамъ равенъ 1, надо сказать, что мы должны грекамъ 100.000“ (М. М. II, 118).

Но такъ какъ этоха возрожденія математики въ Европѣ началась при непосредственномъ вліяніи арабскихъ сочиненій, и такъ какъ ихъ математика любопытна съ точки зрѣнія интересующаго насъ вопроса, то скажемъ объ ней, почерпая факты изъ сочиненія: „Ващенко-Захар-

ченко. Историческій очеркъ развитія геометріи“, гдѣ арабы разсматриваются подробно (стр. 449—684) на основаніи новѣйшихъ изслѣдованій объ нихъ.

52. Арабы прекрасно знаютъ древнихъ грековъ; но они дополнили древнюю систему геометріи, сдѣлавъ крупный шагъ, который, какъ указали выше со словъ М. Магіе, былъ принципіально чуждъ грекамъ. Они ввели въ науку единицу измѣренія, воспользовались этимъ и являются творцами тѣснаго сбиженія между числовыми вычисленіями и геометрическими построеніями.

Въ алгебрѣ *Магомета-бенъ-Муза Альговарезми* (или Алкаризми), жившаго въ IX вѣкѣ, есть отдѣлъ, озаглавленный „Измѣренія“. (Ващ.-Зах. стр. 464).

Авторъ начинаетъ его съ опредѣленія выраженія: „одинъ на одинъ“, что значитъ „локоть на локоть“. Онъ говоритъ, что площадь всякаго квадрата, котораго сторона равна одному, равна единицѣ. Затѣмъ онъ переходитъ къ нахожденію площадей квадратовъ, которыхъ стороны равны нѣсколькимъ единицамъ. Послѣ этого онъ даетъ правила для измѣренія площадей треугольниковъ и четыреугольниковъ, и затѣмъ переходитъ къ измѣренію площади круга. Площадь равносторонняго треугольника онъ находитъ, умножая высоту на половину основанія, а площадь ромба, умножая одну изъ діагоналей на половину другой.

Арабы такимъ образомъ ясно и опредѣленно говорятъ про вычисленіе площадей. Приведемъ еще примѣры.

Алкарги, жившій въ XI вѣкѣ, написалъ сочиненіе „Кафи-филъ-Гисабъ“, т. е. „Все, извѣстное въ ариѳметикѣ“, въ которомъ, между прочимъ, разсматриваетъ и геометрію, называя ее „измѣреніе“.

Говоря о площадяхъ, авторъ дѣлаетъ слѣдующее замѣчаніе (Ващ.-Зах. стр. 478):

„Знай слѣдующее: измѣреніе фигуръ совершенно схоже со взвѣшиваніемъ тяжестей, съ измѣреніемъ длины локтемъ, или съ измѣреніемъ квадратной фигуры извѣстной величины квадратными мѣрами. При этомъ исходятъ отъ мѣръ извѣстныхъ и примѣняютъ ихъ къ измѣренію площадей, совершенно подобно тому, какъ вѣсъ диргема при измѣреніи вѣсомыхъ предметовъ. Если тебя просятъ опредѣлить мѣру площади, то спроси предварительно, какая квадратная мѣра примѣняется, при чемъ ты единицу длины, напримѣръ локоть, *умножаешь самъ на себя*“.

Обращаемъ особое вниманіе на слова: умножаешь локоть самъ на себя.

Бега-Еддинъ (1547—1622) даетъ слѣдующее опредѣленіе „Искусства измѣренія“, т. е. геометріи (Ващ. Зах. стр. 664).

„Искусство мѣрить состоитъ въ отысканіи сколько разъ заключается въ непрерывной пространственной величинѣ линейная единица, или ея часть, или обѣ вмѣстѣ, если это есть линія, или же сколько заключается квадратныхъ единицъ, если это есть поверхность; или сколько кубическихъ единицъ, если это есть тѣло“.

53. Сдѣлаемъ замѣчаніе. Проф. Захарченко (стр. 511) говоритъ: „методы, употребляемые Алкарги, носятъ на себѣ слѣды вліянія сочиненій греческихъ геометровъ. Съ сочиненіями индусскихъ математиковъ арабы были въ то время вѣроятно почти не знакомы, такъ какъ неопре-

дѣленный анализъ, достигшій такой высокой степени развитія у индусовъ, въ сочиненіи Алкарги представляется почти въ томъ-же видѣ, какъ мы его встрѣчаемъ въ „Ариѳметикахъ" Діофанта".

Это едва-ли вѣрно, потому что приведенныя ссылки на арабскихъ математиковъ обрисовываютъ точку зрѣнія, принципіально иную, чѣмъ у греческихъ геометровъ, не знавшихъ формулъ вычисленія площадей; и если она заимствована, то только у индусовъ, которые знаютъ эти формулы, хотя выражаютъ ихъ тоже словесно, какъ напримѣръ Brahmagupta (род. 598 послѣ Р. Хр.).

Арабы вообще, не смотря на безспорное знакомство съ индусами, многаго не переняли у нихъ. Такъ, напримѣръ Brahmagupta умѣетъ пользоваться зависимостію $m^2-n^2: m+n=m-n$, чего ни Діофантъ, ни арабы, ни италіанцы вплоть до Віета не умѣютъ дѣлать. Магометъ-бенъ-Муза, рѣшая задачу: раздѣлить число 10 на двѣ части, чтобы разность ихъ квадратовъ равнялась 40, не догадается, что частное отъ дѣленія 40: 10 равно разности 4 обоихъ искомыхъ чиселъ (М. М. II, 109).

Арабы не переняли также у индусовъ понятія объ отрицательной величинѣ, которая у нихъ имѣетъ только значеніе вычитаемаго.

54. Послѣдніе два факта становятся вполнѣ понятными, если принять во вниманіе характеръ науки вычисленій у арабовъ. Намъ кажется, что вообще было бы лучше не говорить про арабскую алгебру, а только про ихъ ариѳметику. Алгебра въ настоящемъ значеніи наука символическая; и этого то именно оттѣнка она совершенно не имѣетъ у арабовъ. „При производствѣ вычисленій и дѣйствій, формулъ никакихъ не существовало, такъ какъ все производилось словесно; существовали только нѣкоторыя сокращенія"—(Ващ. Зах. стр. 473).

Да и сами арабы подъ алгеброй понимаютъ только умѣніе рѣшать уравненія. Въ ихъ сочиненіяхъ имѣются очень ясныя опредѣленія, что понимать подъ алгеброй, и таковыя вполнѣ соотвѣтствуютъ содержанію ихъ сочиненій. Приведемъ примѣры.

Омаръ Алкгаями (XI вѣкъ) даетъ слѣдующее опредѣленіе алгебры (Ващ. Зах. стр. 579):

„Алгебра есть наука. Предметъ ея абсолютное число и измѣримыя (геометрически) величины, которыя будучи неизвѣстны, но выражены чрезъ величину извѣстную, могутъ быть вычислены. Извѣстная величина есть величина или опредѣленное отношеніе, что видно при внимательномъ ихъ разсмотрѣніи *). Въ этой наукѣ ищутъ соотношенія, существующія между данными величинами и величинами, составляющими предметъ алгебры, о которыхъ мы говорили выше. Превосходство этого искусства заключается въ знаніи математическихъ методовъ, при помощи которыхъ можно производить вышеупомянутое опредѣленіе неизвѣстныхъ, какъ численныхъ, такъ и геометрическихъ".

Еще яснѣе выражается *Ибнъ-Халдуна*, жившій въ XIV вѣкѣ. (Ващ. Зах. стр. 637). Въ числѣ семи философскихъ наукъ онъ упоминаетъ только ариѳметику, умалчивая объ алгебрѣ, которая излагается имъ какъ часть ариѳметики и опредѣляется слѣдующимъ образомъ: „алгебра есть

*) Смыслъ этого: извѣстная величина или именованная или отвлеченная

искусство, при помощи котораго опредѣляется неизвѣстное число по данному и извѣстному, если только между ними существуетъ зависимость, которая даетъ возможность получить этотъ результатъ".

55. Отсюда видно, что арабы подъ алгеброю понимаютъ только искусство рѣшать числовыя уравненія, и всѣ ихъ разсмотрѣнія чисто-ариѳметическія. Это надо имѣть въ виду, когда говорятъ про алгебру арабовъ.

Характерную особенность арабской ариѳметики составляетъ тѣсная связь съ геометріей. Это кладетъ особый отпечатокъ на числовыя разсмотрѣнія, сказавшійся особенно рѣзко въ томъ, что во первыхъ степени неизвѣстныхъ носятъ геометрическія названія квадрата и куба, а во вторыхъ, и это особенно замѣчательно, уравненія четвертой и высшихъ степеней арабами считаются лишенными смысла, потому что четвертая степень не имѣетъ геометрическаго значенія.

Приведемъ слѣдующую выписку изъ алгебры Омара Алкганями (Ващ. Зах. стр. 581).

„Подъ именемъ измѣримыхъ величинъ я понимаю непрерывныя величины, которыхъ существуетъ четыре рода: линія, поверхность, тѣло и время, какъ это изложено въ категоріяхъ, а еще болѣе обстоятельно въ метафизикѣ. Неизвѣстную величину, которую желаютъ опредѣлить, алгебристы обыкновенно называютъ вещь, ея произведеніе само на себя —квадратъ, ея произведеніе на квадратъ—кубъ; произведеніе квадрата на квадратъ—квадрато-квадратомъ или биквадратомъ, и т. д. Изъ началъ Эвклида извѣстно, что всѣ эти величины находятся въ непрерывной пропорціи, т. е. что единица такъ относится къ корню, какъ корень къ квадрату, какъ квадратъ къ кубу; а слѣдовательно число относится къ корнямъ, какъ корни къ квадратамъ, какъ квадратъ къ кубамъ".

„Алгебраическія рѣшенія, какъ извѣстно, производятся только при помощи уравненій, т. е. приравнивая однѣ степени другимъ. Когда алгебристъ употребляетъ биквадратъ въ вопросахъ, предметъ которыхъ измѣреніе величинъ, то это слѣдуетъ понимать не въ прямомъ, а въ метафорическомъ смыслѣ, такъ какъ было-бы нелѣпо причислить биквадратъ къ числу измѣримыхъ (геометрически) величинъ. Къ числу измѣримыхъ величинъ принадлежатъ: во первыхъ величины одного измѣренія, т. е. корень, или по отношенію къ квадрату, стороны; во вторыхъ величины двухъ измѣреній, т. е. поверхность; квадратъ принадлежитъ такъ-же къ измѣримымъ величинамъ, такъ какъ оно есть квадратная поверхность. Наконецъ величины трехъ измѣреній; къ числу ихъ принадлежатъ параллелепипедъ и кубъ, ограниченный шестью четыреугольниками. Такъ какъ другихъ измѣреній не существуетъ, то къ числу измѣримыхъ величинъ не могутъ принадлежать ни биквадратъ, ни высшія степени. Если-же говорятъ, что биквадратъ входитъ въ число измѣримыхъ величинъ, то это говорится по отношенію къ его обратному значенію *), употребляемому въ вопросахъ мѣры, а не потому, чтобы

*) Это предложеніе нѣсколько темное. Переводчикъ Омара, Woepke, понимаетъ слово обратный въ непосредственномъ смыслѣ, какъ $\frac{1}{r^4}$. Это едва ли спра-

биквадратъ принадлежалъ къ числу величинъ, которыя могутъ быть измѣрены, что составляетъ разницу. Биквадратъ ни внутренне, ни внѣшне не принадлежитъ къ числу величинъ, его нельзя сравнивать ни съ четнымъ, ни съ нечетнымъ, которыя принадлежатъ къ наружнымъ свойствамъ чиселъ, при посредствѣ которыхъ послѣдовательность измѣримыхъ величинъ представляется непрерывной".

„Все то, что находитъ въ сочиненіяхъ алгебристовъ, относящагося къ четыремъ геометрическимъ величинамъ, изъ которыхъ составляются уравненія, т. е. абсолютныя числа, стороны, квадраты и кубы, ограничивается тремя уравненіями, содержащими число, стороны и квадраты. Мы напротивъ хотимъ развить методы, при помощи которыхъ можно опредѣлить неизвѣстную величину изъ уравненія, содержащаго четыре степени, о которыхъ мы выше сказали, что онѣ исключительно принадлежатъ къ измѣримымъ величинамъ, именно: числа, вещь, квадратъ и кубъ".

„Методы рѣшенія уравненій, доказательство которыхъ основано на свойствахъ круга, т. е. на предложеніяхъ, заключающихся въ „Началахъ" и „Данныхъ" Эвклида, весьма просты. Методы-же рѣшеній уравненій, которыя доказываются при помощи свойствъ коническихъ сѣченій, основаны на предложеніяхъ первыхъ двухъ книгъ „Коническихъ сѣченій" Аппалонія".

„Когда предметъ вопроса есть абсолютное число, то ни мнѣ, ни кому либо другому изъ математиковъ не удалось найти рѣшенія подобныхъ уравненій (можетъ быть послѣ насъ кто другой пополнитъ этотъ пробѣлъ), исключая, когда онѣ содержатъ первыя три степени, именно число вещь и квадратъ. Для этихъ родовъ, доказательство которыхъ основано на сочиненіи Эвклида, я укажу численное доказательство. Такъ-же необходимо замѣтить, что геометрическое доказательство этихъ методовъ не исключаетъ и не дѣлаетъ лишнимъ численныхъ доказательствъ, когда предметъ вопроса есть число, а не измѣримая величина. Это видно также у Эвклида, который, послѣ доказательствъ, данныхъ нѣкоторымъ предложеніямъ, относящимся къ пропорціональности геометрическихъ величинъ, въ пятой книгѣ своего сочиненія, снова даетъ доказательство тѣхъ же предложеній пропорціональности, когда предметъ ихъ есть число, въ седьмой книгѣ".

Далѣе Омаръ Алкганями перечисляетъ 16 видовъ кубическихъ уравненій и говоритъ:

„Намъ удалось рѣшить ихъ только геометрически, а не численно. Доказательство этихъ видовъ уравненій возможно только при помощи коническихъ сѣченій".

Приведенную выписку необходимо дополнить слѣдующимъ замѣчаніемъ. Алкганями говоритъ, что онъ даетъ численныя доказательства уравненій второй степени. Однако онъ называетъ доказательствомъ толь-

---

ведливо, потому что $\frac{1}{r^4}$ не легче истолковать геометрически, чѣмъ r^4. Думаемъ, что рѣчь идетъ просто о первой степени, которую Омаръ въ такихъ случаяхъ называетъ стороною биквадрата.

но словесное указаніе во первыхъ, какъ вычислить корень квадратнаго уравненія по коэффиціентамъ, и во вторыхъ, какія зависимости между коэффиціентами должны соблюдаться, чтобы уравненія были возможны, т. е. имѣли положительный корень. Доказательствъ же въ настоящемъ значеніи этого понятія, т. е. въ смыслѣ вывода формулы рѣшенія, совершенно нѣтъ.

56. Вышеприведенное позволяетъ сдѣлать общее заключеніе объ арабской математикѣ.

Во первыхъ арабы прекрасно знаютъ сочиненія греческихъ геометровъ и владѣютъ ихъ методами. Это дало возможность Омару Алкганяни рѣшить геометрически помощію свойствъ коническихъ сѣченій кубическія уравненія.

Во вторыхъ арабы оцѣнили и поняли значеніе единицы измѣреній и, вслѣдствіе этого, выражаютъ площади и объемы не въ томъ видѣ, какъ греки, а какъ и въ настоящее время, хотя только словесно, не изображая формулъ символами.

Въ третьихъ ихъ вычисленія имѣютъ ариѳметическій, а не алгебраическій характеръ, и они не ставятъ числовыхъ вопросовъ въ общемъ видѣ; если же дѣлаютъ это, такъ даютъ геометрическія рѣшенія. Они не прибѣгаютъ къ символамъ и въ зависимости отъ этого не знаютъ ни отрицательныхъ, ни мнимыхъ величинъ.

Въ четвертыхъ можно сказать, что особая отличительная черта ихъ числовыхъ вычисленій состоитъ въ томъ, что они развивались подъ самымъ непосредственнымъ вліяніемъ геометрическихъ представленій. Это важно. Не алгебра оплодотворяла геометрію, но, какъ разъ наоборотъ, путемъ геометрическихъ пріемовъ было выяснено, что алгебраическій вопросъ о рѣшеніи уравненій имѣетъ смыслъ и допускаетъ отвѣтъ. Арабы, мало того, что не знаютъ символовъ, по самому существу своихъ воззрѣній совершенно чужды духа отвлеченности современной алгебры, и въ этомъ смыслѣ стоятъ на чисто греческой почвѣ. Числовая зависимость уравненія связываетъ кубы, площади, линіи и числа и теряетъ смыслъ, когда является биквадратъ, т. е. четвертая степень линіи—величина неизмѣримая.

Отверганіе арабами смысла уравненій четвертой степени, и притомъ съ подобной точки зрѣнія, доказываетъ на сколько они по существу были проникнуты сознаніемъ, что смыслъ дѣйствій оправдывается осмысленностію результата. Такимъ образомъ первые сознательные шаги науки о вычисленіи искомой по нѣкоторымъ даннымъ дѣлались при свѣтѣ геометрическихъ истинъ; и намъ кажется, что можно смѣло утверждать, что арабы вполнѣ наивно производили дѣйствія надъ именованными количествами, примыкая къ геометрическому изслѣдованію зависимостей между ними, созданному греками. Въ ихъ фразахъ: „локоть на локоть", какъ опредѣленіе единицы площади, чувствуется только недостатокъ яснаго упоминанія слова *произведеніе*. Арабы не ставили, и не могли поставить вопроса: производятся ли дѣйствія надъ величинами или только надъ ихъ числовыми значеніями. Схоластика—современная арабамъ наука, но не ими разрабатывалась.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Начальникъ Кіевскаго техническаго ж. д. училища *Ѳ. Ю. Мацонъ.*

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Засѣданіе Кіевскаго Общ. Еств. 18-го марта 1889 г. По утвержденіи протокола предыдущаго засѣданія были сдѣланы слѣдующія научныя сообщенія.

1) *Н. Н. Успенскій:* „Нѣсколько словъ по поводу пятидесятилѣтія открытія гальванопластики". Въ этой бесѣдѣ референтъ изложилъ не только краткую біографію Б. С. Якоби и исторію изобрѣтенія гальванопластики, но и представилъ очеркъ современнаго состоянія этой области практ. физики *).

2) *В. К. Совинскій* демонстрировалъ препараты различныхъ органовъ крокодила (который въ прошломъ году былъ купленъ живымъ и содержался нѣкоторое время при зоолог. кабинетѣ Кіевскаго университета) и сдѣлалъ спеціальное сообщеніе: „О женской уро-генитальной системѣ аллигатора."

3) *П. Я. Армашевскій* представилъ словесный отчетъ „О поѣздкѣ въ Англію" на состоявшійся тамъ осенью прошлаго года геологическій международный конгрессъ.

4) *Э. К. Шпачинскій* сообщилъ: „О результатахъ новѣйшихъ наблюденій надъ актино-электрическими явленіями" и указалъ въ общихъ чертахъ какое значеніе можетъ имѣть всестороннее изученіе этихъ явленій. Изложивъ вкратцѣ то, что читателямъ „Вѣстника" уже извѣстно объ опытахъ проф. Столѣтова, Риги, Биша и Блондло **) надъ электрическою проводимостью воздуха, освѣщеннаго ультра-фіолетовыми лучами, референтъ изъ поздѣйшихъ опытовъ обратилъ особенное вниманіе на слѣдующіе.

a) Всѣ изслѣдователи согласны между собою касательно того пункта, что актино-электрическій эффектъ свѣтовыхъ лучей очень слабъ при освѣщеніи солнечнымъ свѣтомъ, замѣтнѣе—при магніевомъ освѣщеніи, значительно сильнѣе—для электрическаго свѣта (Вольтовой дуги) и еще сильнѣе—когда въ Вольтовой дугѣ горятъ такіе металлы какъ аллюминій и цинкъ. Риги показалъ, что различные газы (напр. свѣтильный), равно какъ и воздухъ, въ значительной мѣрѣ поглощаютъ ту лучистую энергію ультра-фіолетовыхъ лучей, которая въ такомъ напр. фото-электрическомъ элементѣ проф. Столѣтова преобразуется въ энергію электрическую; если по пути слѣдованія лучей свѣта отъ источника къ прибору расположить трубу, закрытую съ обоихъ концовъ пластинками кварца, то наибольшій актино-электр. эффектъ будетъ въ томъ случаѣ, когда въ трубѣ сдѣлана искусственная пустота. Отсюда вытекаетъ, что весьма незначительное вліяніе солнечныхъ лучей есть только слѣдствіе поглощательной способности земной атмосферы и не можетъ служить доказательствомъ отсутствія на солнцѣ *электро-активныхъ* лучей. Но солнце шлетъ свои лучи на землю непрерывно, и непрерывно поглощаемая ихъ актино-элекр. энергія должна же въ той либо другой формѣ накопляться въ атмосферѣ и расходоваться. Сопоставивъ, далѣе, съ этимъ выводомъ тотъ фактъ, установленный наблюденіями Аргеніуса и проф. Столѣтова, что актино-электр. эффектъ въ воздухѣ возрастаетъ съ уменьшеніемъ давленія и достигаетъ максимальнаго значенія при давленіи въ 3—4 мм., референтъ высказалъ предположеніе, что въ верхнихъ слояхъ атмосферы актино-электрическія явленія, обусловливаемыя солнечными лучами, должны играть немаловажную роль, и что такимъ образомъ по неволѣ приходимъ къ

*) Въ виду интереса, какой это можетъ представить и для нашихъ читателей, рефератъ г. Успенскаго, имъ самимъ составленный, будетъ напечатанъ полностью. *Прим. ред.*

**) См. „Вѣстникъ" № 56, стр. 178, сем. V.

весьма серьезному вопросу—не есть ли атмосферное электричество и всѣ связанныя съ нимъ явленія только слѣдствіе поглощательной способности воздуха? Въ пользу такого допущенія, какъ нельзя болѣе, говорятъ еще такіе факты, какъ подмѣченныя недавно 26-и дневная періодичность грозовыхъ и магнитныхъ явленій *), какъ давноизвѣстная и до сихъ поръ не выясненная слишкомъ 11-и лѣтняя періодичность сѣверныхъ сіяній и измѣняемости элементовъ земного магнитизма, совпадающая съ такою-же періодичностью максимальнаго появленія солнечныхъ пятенъ **).

б) Опытами Биша и Риги доказано, что ультра-фіолетовые лучи могутъ вызвать не только электризацію проводника, но еще и его перемѣщеніе, если только сопротивленіе перемѣщенію ничтожно. Съ другой стороны новѣйшіе успѣхи примѣненія фотографіи къ астрономіи доказываютъ, какъ богаты небесныя свѣтила ультра-фіолетовыми лучами. Отсюда референтъ считаетъ возможнымъ сдѣлать новое допущеніе, что энергія электрически-активныхъ лучей, способная приводить во вращеніе какую нибудь электрическую мельничку, устроенную на подобіе радіометра Крукса, можетъ проявиться и болѣе грандіозными явленіями во вселенной, въ особенности вблизи самихъ источниковъ свѣта, и если въ настоящее время, для объясненія движенія кометъ и ихъ хвостовъ, нѣкоторые астрономы склонны уже допускать кромѣ всемірнаго тяготѣнія еще существованіе нѣкоторой загадочной отталкивательной силы, то, быть можетъ, болѣе всестороннее изученіе актино-электрическихъ явленій дастъ намъ со временемъ право приписать эту отталкивательную силу непосредственному дѣйствію электрически-активныхъ лучей солнца.

в) Всѣ металлы при сильномъ ихъ освѣщеніи свѣтомъ, богатымъ ультра-фіолетовыми лучами, обнаруживаютъ положительную электризацію (исключеніе, повидимому, составляетъ мѣдь). Напротивъ—всѣ живыя растенія, какъ это замѣтилъ Биша, при такихъ же условіяхъ электризуются отрицательно, и притомъ почти втрое сильнѣе чѣмъ металлы (исключеніе у Биша составлялъ единственный экземпляръ гераніумъ, обнаружившій признаки положительнаго заряда). Изъ предварительныхъ опытовъ проф. Боргмана, опубликованныхъ въ самое послѣднее время ***), а также изъ прежнихъ опытовъ Риги и др., выяснилось, что актино-электрическое дѣйствіе лучей не есть явленіе мгновенное, и что по всей вѣроятности оно обусловливается электрическою конвекціею (перенесеніемъ) газовыхъ частицъ. Если ко всему этому присоединить весьма капитальное открытіе, сдѣланное проф. Столѣтовымъ, а именно, что изъ всѣхъ изученныхъ имъ до сихъ поръ газовъ, углекислота рѣзко выдѣляется наибольшимъ актино-электрическимъ эффектомъ (который въ атмосферѣ этого газа почти вдвое превосходитъ таковой же эффектъ въ воздухѣ), то почти невозможно будетъ отказаться отъ мысли, что весьма существенные процессы жизни растеній обусловливаются актино-электрическимъ дѣйствіемъ лучей свѣта. Правда, дѣйствіе это для солнечныхъ лучей при поверхности земли весьма слабо въ воздухѣ, но тѣмъ не менѣе оно существуетъ, а для частицъ углекислоты, поглощаемой зелеными частями растеній только подъ вліяніемъ свѣта, оно должно быть больше. Если бы растительный міръ нуждался только въ теплотѣ солнечныхъ лучей, общій фонъ земного ландшафта былъ бы безъ сомнѣнія желтый или красный; напротивъ, мы видимъ, что переходъ отъ преобладающаго зеленаго цвѣта, т. е. отъ средины спектра, къ его красному концу непосредственно предшествуетъ фазѣ пол-

---

*) См. „Вѣстникъ“ №№ 58, 60, стр. 230 и 267 сем. V.

**) См. статью Конопацкаго: „Солнце“ въ №№ „Вѣст.“ 2, 5, 8, 14, 16, 19, 21, 22.

***) См. Журн. Р. Физ.-Хим. Общ., выпускъ 2 за текущій 1889 г., стр. 23.

наго омертвѣнія. На основаніи всѣхъ этихъ соображеній референтъ высказалъ убѣжденіе, что обстоятельное изученіе актино-электрическихъ процессовъ въ живыхъ растеніяхъ послужитъ въ области физіологіи ключемъ къ разъясненію многихъ существенныхъ вопросовъ.

Другія сообщенія, назначенныя къ тому-же засѣданію, вслѣдствіе поздняго времени отложены къ слѣдующему засѣданію, назначенному на 1-ое апрѣля.

Ш.

ЗАДАЧИ.

№ 430. Даны двѣ діагонали гармоническаго четыреугольника и сумма прямыхъ, соединяющихъ средины одной діагонали съ концами другой, вычислить стороны. Пр. *В. Ермаковъ.*

№ 431. Рѣшить уравненіе

$$\frac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}=a\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}.$$

(Заимств.) *Я. Тепляковъ.*

№ 432. Опредѣлить сумму

$$S=(a+b)+(a^2+ab+b^2)+\ldots\ldots+(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots\ldots+b^n).$$

П. Никульцевъ (См.).

№ 433. Данъ четыреугольникъ ABCD. Чрезъ средину діагонали AC проводимъ прямую параллельную другой діагонали BD; чрезъ средину BD—прямую параллельную AC. Точку пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ O соединяемъ съ срединами сторонъ AB, BC, CD, DA четыреугольника ABCD. Показать, что четыре полученныя такимъ образомъ прямыя дѣлятъ четыреугольникъ ABCD на четыре равныя части.

Н. Соколовъ (Кіевъ).

№ 434. Доказать теорему Feuerbach'a: кругъ девяти точекъ касается вписаннаго и внѣвписанныхъ въ данный треугольникъ круговъ.

С. Кричевскій (Ромны).

№ 435. Въ окружность, центръ которой въ O и радіусъ которой R, вписанъ треугольникъ ABC. Биссекторъ угла A пересѣкаетъ въ A_1 сторону BC и разлагаетъ треугольникъ ABC на два треугольника ABA_1 и ACA_1. Пусть P центръ окружности, описанной около одного изъ нихъ, T—центръ окружности, описанной около другого. Доказать, что

$$OP=OT=\frac{a}{b+c}R.$$

А. Гольденбергъ (Спб.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 301. Общество изъ $2m$ лицъ раздѣляется на m паръ для игры. Сколькими способами оно можетъ такъ раздѣлиться?

Означимъ искомое число распредѣленій черезъ x; для опредѣленія его рѣшимъ, какія перестановки должно сдѣлать въ каждомъ распредѣ-

леніи, чтобы получилось полное число перестановокъ изъ $2m$ предметовъ, именно:

$$1.2.3 \ldots\ldots\ldots (2m-1)2m.$$

Если въ какомъ либо распредѣленіи будемъ переставлять лица каждой пары, одно на мѣсто другого, то получимъ всего 2^m группъ. Если въ каждой группѣ будемъ переставлять всѣ m паръ, одну на мѣсто другой, то получимъ

$$1.2.3 \ldots\ldots\ldots (m-1)m$$

группъ.

Сдѣлавъ указанныя перестановки въ каждомъ распредѣленіи, получимъ полное число перестановокъ изъ $2m$ предметовъ. Слѣдовательно

$$x.2^m.1.2.3 \ldots (m-1)m = 1.2.3 \ldots (2m-1)2m,$$

отсюда

$$x = \frac{1.2.3 \ldots (2m-1).2m}{2^m.1.2.3 \ldots (m-1)m} = 1.3.5 \ldots (2m-1).$$

И. Кумсковъ (Воронежъ), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *Н. Артемьевъ* (Спб.), Ученикъ Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

№ 317. Показать справедливость равенства:

$$arctg\frac{1}{n} = arctg\frac{2}{(n+1)^2} + arctg\frac{2}{(n+3)^2} + arctg\frac{2}{(n+5)^2} + \ldots$$

Пользуясь тождествомъ

$$arctg\frac{1}{n} - arc\,tg\frac{1}{n+2} = arc\,tg\frac{2}{(n+1)^2},$$

и подставляя сюда $n+2$, $n+4$ и т. д. вм. n, имѣемъ:

$$arctg\frac{1}{n+2} - arc\,tg\frac{1}{n+4} = arc\,tg\frac{2}{(n+3)^2}$$

. . . .

Складывая теперь почленно, получимъ

$$arctg\frac{1}{n} = arc\,tg\frac{2}{(n+1)^2} + arc.tg\frac{2}{(n+3)^2} + \ldots$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *С. Шатуновскій* (Кам.-Под.).

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 1 Апрѣля 1889 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.